УДК 621.3

А.А.ХАРИСОВ, канд. техн. наук
Харьковская государственная академия городского хозяйства

РАСЧЕТ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО СОПРОТИВЛЕНИЯ ПРЯМОГО МНОГОПРОВОЛОЧНОГО ПРОВОДНИКА ПОСТОЯННОМУ ТОКУ

С учетом нормального ("колоколообразного") распределения плотности постоянного электрического тока в поперечном сечении уединенных прямых круговых цилиндрических проводников выведена формула расчета электрического сопротивления прямого многопроволочного проводника постоянному току.

Как показывает анализ [1], в наиболее простом случае уединенного прямого кругового цилиндрического проводника с установившимся постоянным током и температурным режимом распределение плотности тока в поперечном сечении проводника представляется в виде

$$J(x,y)=\frac{I}{\pi\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}\frac{r_0^2}{l}\right)^2}\exp\left[-\frac{x^2+y^2}{\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}\frac{r_0^2}{l}\right)^2}\right]$$

или

$$J(\bar{r})=\frac{I}{\pi\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}\frac{r_0^2}{l}\right)^2}\exp\left[-\frac{r^2}{\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}\frac{r_0^2}{l}\right)^2}\right], \quad (1)$$

где x, y или $\bar{r}$ – текущие координаты в прямоугольной или цилиндрической системе координат в плоскости поперечного сечения проводника с началом координат в точке симметрии поперечного сечения проводника; $I=\int\limits_{-\infty}^{\infty}dx\int\limits_{-\infty}^{\infty}J(x,y)dy$ – полный ток в плоскости поперечного сечения проводника; r_0 – внешний радиус проводника; l – длина проводника; $\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}\frac{r_0^2}{l}\right)^2$ – дисперсия нормального распределения плотности тока в плоскости поперечного сечения проводника.

Аналогичным образом, но применительно к данной задаче распределение плотности тока в поперечном сечении условно уединенного, однопроволочного прямого кругового цилиндрического проводника с индексом "n" запишем следующим образом:

$$J_n(x,y)=\frac{I_n}{\pi\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}\frac{r_{0n}^2}{l}\right)}\exp\left[-\frac{(x-x_n)^2+(y-y_n)^2}{\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}\frac{r_{0n}^2}{l}\right)^2}\right], \qquad (2)$$

где $I_n=\int\limits_{-\infty}^{\infty}dx\int\limits_{-\infty}^{\infty}J_n(x,y)dy$ – полный ток, проходящий через плоскость поперечного сечения n-го условно уединенного прямого кругового цилиндрического проводника.

Используя распределение плотности тока в условно уединенном однопроволочном проводнике (2), выведем выражение омического сопротивления многопроволочного проводника в виде пакета прямых круглых цилиндрических проводников длиной l, оси симметрии которых параллельны друг другу, а начала и концы ограничены плоскостями, перпендикулярными к осям их симметрии.

В качестве исходного расчетного выражения для этой цели используем известное энергетическое соотношение электродинамики сплошных сред

$$RI^2=\int[\vec{E}\vec{H}]\cdot d\vec{f}, \qquad (3)$$

где R – омическое сопротивление проводника; I – полный ток проводника; $\vec{E},\vec{H}$ – напряженности электрического и магнитного поля, создаваемые полным током проводника, $\int ... d\vec{f}$ – интегрирование ведется по поверхности проводника.

Так как плотность тока, а следовательно, и напряженность электрического поля по оси z постоянны, задача удовлетворяет уравнению Лапласа:

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2}=0. \qquad \mathbf{(4)}$$

Граничным условием решения уравнения Лапласа принимаем проекцию напряженности электрического поля по оси $z>0$ в точке $z=0$:

$$E_z(x,y)|_{z=0}=\sum_{n=1}^{N}\frac{I_n}{\pi\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}\frac{r_{0n}^2}{l}\right)\gamma_0(T)}\exp\left[-\frac{(x-x_n)^2+(y-y_n)^2}{\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}\frac{r_0^2}{l}\right)^2}\right], \quad (5)$$

где l – длина прямых круглых цилиндрических проводов по оси z; $\gamma_0(T)$ – электрическая проводимость материала проводников.

При таких условиях задачи при определении сопротивления проводника по формуле (3) интегрирование проводим по плоскости $z=0$.

Так как напряженность электрического поля по осям x, y не ограничена, то для решения уравнения Лапласа можно использовать метод разложения полей в интеграл Фурье.

Для определения компонент напряженности электромагнитного поля, создаваемых токами проводников, используем электростатические уравнения Максвелла:

$$\begin{aligned}&\frac{\partial E_x}{\partial x}+\frac{\partial E_y}{\partial y}+\frac{\partial E_z}{\partial z}=0;\ \frac{\partial E_x}{\partial y}=\frac{\partial E_y}{\partial x};\\&\frac{\partial H_y}{\partial y}+\frac{\partial H_x}{\partial x}=0;\ \frac{\partial H_y}{\partial y}-\frac{\partial H_x}{\partial x}=\gamma_0(T)E_z.\end{aligned} \quad (6)$$

Переходя к компонентам поля Фурье, получим:

$$\begin{aligned}&E_{yk}=-j\frac{k_y}{k^2}\frac{dE_{zk}}{dz};\ E_{xk}=-j\frac{k_x}{k^2}\frac{dE_{zk}}{dz};\\&H_{xk}=-j\gamma_0(T)\frac{k_yE_{zk}}{k^2};\ H_{yk}=j\gamma_0(T)\frac{k_xE_{zk}}{k^2};\ k=\sqrt{k_x^2+k_y^2}.\end{aligned} \quad (7)$$

В общем виде значение компоненты поля Фурье E_{zk}, удовлетворяющее граничному условию (5), принимаем в виде

$$E_{zk}=-\frac{j}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}E_k\left(\int J\right)\exp\left[j\vec{k}\vec{r}-kz\right]d\vec{k}, \quad (8)$$

где

$$E_k(\int J) = \frac{1}{\gamma_0(T)} \sum_{n=1}^{N} \int J_n(\vec{r}) \exp(-j\vec{k}\vec{r}) \tag{9}$$

– постоянная интегрирования.

Применяя обратное преобразование Фурье к (7), получим решение системы электростатических уравнений Максвелла в форме

$$\begin{aligned}
E_x(\vec{r}) &= \frac{j}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} E_k(\int J) \exp\left[j\vec{k}\vec{r} - kz\right] \frac{kx}{k} d\vec{k}\,; \\
E_y(\vec{r}) &= \frac{j}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} E_k(\int J) \exp\left[j\vec{k}\vec{r} - kz\right] \frac{ky}{k} d\vec{k}\,; \\
H_x(\vec{r}) &= -\frac{j}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} E_k(\int J) \exp\left[j\vec{k}\vec{r} - kz\right] \frac{ky}{k} d\vec{k}\,; \\
H_y(\vec{r}) &= \frac{j}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} E_k(\int J) \exp\left[j\vec{k}\vec{r} - kz\right] \frac{kx}{k} d\vec{k}\,.
\end{aligned} \tag{10}$$

Приравнивая в уравнениях (10) $z = 0$ и подставляя их в (3), где в нашем случае

$$\left[\vec{E}\vec{H}\right]_{z=0} = E_x(\vec{r}) H_y(\vec{r}) - E_y(\vec{r}) H_x(\vec{r})\,, \tag{11}$$

получим искомое значение омических потерь мощности в многопроволочном проводнике вида

$$I^2 R = \frac{\gamma_0(T)}{4\pi^2} \sum_{n=1}^{N} \int_{-\infty}^{\infty} \left[E_{kn}(\int J_n)\right]^2 \frac{d\vec{k}}{k}\,, \tag{12}$$

где I – полный ток многопроволочного проводника.

Умножив обе части граничного условия (5) на $\exp(-jk_x x - jk_y y)$ и проинтегрировав его. используя интеграл Пуассона

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp[-\alpha(\xi - \xi_0)] d\xi = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\,, \tag{13}$$

получим значения постоянной интегрирования

$$E_k(\int J)=\frac{1}{\gamma_0(T)}\sum_{n=1}^{N} I_n \exp\left[-\frac{k^2\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}\frac{r_{0n}^2}{l}\right)^2}{4}\right]. \qquad (14)$$

Дальнейшее решение задачи разделим на две части.

Вначале найдем суммарное значение сопротивления проводников в предположении их уединенности – R_y и затем определим их сопротивление, непосредственно связанное с электромагнитным взаимодействием проводников $R_{вз}$.

Подставив значение постоянной интегрирования (14) в (12) и перейдя в цилиндрическую систему координат в k-пространстве, получим

$$R_y I^2=\frac{1}{4\pi^2\gamma_0(T)}\sum_{n=1}^{N} I_n^2 \exp\left[-\frac{k^2\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}\frac{r_{0n}^2}{l}\right)^2}{4}\right]\times$$

$$\times\int_0^{2\pi}\exp(jk\cos\varphi)d\varphi dk. \qquad (15)$$

Заменяя в (15) последний интеграл функцией Бесселя, приходим к выражению

$$R_y=\frac{1}{2\pi I^2\gamma_0(T)}\sum_{n=1}^{N} I_n^2\int_0^{\infty} J_0(k)\exp\left[-\frac{k^2\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}\frac{r_{0n}^2}{l}\right)^2}{4}\right]dk\cdot \qquad (16)$$

Используя для вычисления интеграла в (16) известное соотношение

$$\int_0^{\infty} J_0(k)\exp\left[-\frac{k^2\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}\frac{r_{0n}^2}{l}\right)^2}{4}\right]dk = \left[\frac{\pi}{2\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}\frac{r_{0n}^2}{l}\right)^2}\right]^{1/2} = \frac{2l}{r_{0n}^2}, \qquad (17)$$

получим выражение омического сопротивления прямого многопроволочного проводника без учета электромагнитного взаимодействия проводников в виде

$$R_y = \frac{1}{\pi I^2 \gamma_0(T)} \sum_{n=1}^{N} \frac{I_n^2 l}{r_{0n}^2}. \qquad (18)$$

Аналогичным образом с учетом (14), (12), (15) представим и общее выражение сопротивления прямого многопроволочного проводника, обусловленное взаимодействием токов проводников:

$$R_{вз} = \frac{1}{4\pi^2 I^2 \gamma_0(T)} \sum_{n \neq s}^{N} I_n I_s \int_0^{\infty} \exp\left\{-\frac{k^2\left[\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}\frac{r_{0n}^2}{l}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}\frac{r_{0s}^2}{l}\right)^2\right]}{4}\right\} \times$$

$$\times \int_0^{2\pi} \exp(jkl_{ns}\cos\varphi)d\varphi \frac{dk}{k} \qquad (19)$$

Здесь $l_{ns} = (x_n - x_s)^2 + (y_n - y_s)^2$ – расстояние между продольными осями прямых круглых цилиндрических проводников с токами I_n и I_s; r_{0n} и r_{0s} – внешние радиусы соответствующих прямых круглых цилиндрических проводников.

Заменяя в (19) последний интеграл функцией Бесселя, приходим к выражению

$$R_{вз}=\frac{1}{2\pi l^2\gamma_0(T)}\sum_{n\neq s}^{N}I_nI_s\int_0^{\infty}J_0(k)\exp\left\{-\frac{k^2\left[\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}\frac{r_{0n}^2}{l}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}\frac{r_{0s}^2}{l}\right)^2\right]}{4}\right\}dk. \qquad (20)$$

Применяя для вычисления интеграла в (20) модифицированную функцию Бесселя

$$\int_0^{\infty}J_0(k)\exp\left\{-\frac{k^2\left[\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}\frac{r_{0n}^2}{l}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}\frac{r_{0s}^2}{l}\right)^2\right]}{4}\right\}dk=\left(\frac{\pi}{\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}\frac{r_{0n}^2}{l}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}\frac{r_{0s}^2}{l}\right)^2}\right)^{1.2}\times$$

$$\times I_0\left(\frac{l_{ns}^2}{2\left(\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}\frac{r_{0n}^2}{l}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}\frac{r_{0s}^2}{l}\right)^2\right)}\right)\times\exp\left\{\frac{l_{ns}^2}{2\left[\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}\frac{r_{0n}^2}{l}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}\frac{r_{0s}^2}{l}\right)^2\right]}\right\}, \qquad (21)$$

находим общее расчетное выражение электрического сопротивления прямого многопроволочного проводника, обусловленное взаимодействием токов проводников:

$$R_{вз}=\frac{1}{2\pi l^2\gamma_0(T)}\sum_{n\neq s}^{N}I_nI_s\left[\frac{\pi}{\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}\frac{r_{0n}^2}{l}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}\frac{r_{0s}^2}{l}\right)}\right]^{1/2}\times$$

$$\times\exp\left\{-\frac{l_{ns}^2}{2\left[\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}\frac{r_{0n}^2}{l}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}\frac{r_{0s}^2}{l}\right)\right]}\right\}\times I_0\left(\frac{l_{ns}^2}{2\left(\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}\frac{r_{0n}^2}{l}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}\frac{r_{0s}^2}{l}\right)^2\right)}\right). \qquad (22)$$

С учетом (20) и (22) выражение полного электрического сопротивления постоянному току прямого многопроволочного проводника в виде пакета прямых круглых цилиндрических проводников длиной l, оси симметрии которых параллельны друг другу, в форме

$$R=\frac{1}{\pi l^2\gamma_0(T)}\sum_{n=1}^{N}\frac{I_n^2 l}{r_{0n}^2}+\frac{1}{2\pi l^2\gamma_0(T)}\sum_{n\neq s}^{N}I_n I_s \exp\left[\frac{\pi}{\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}\frac{r_{0n}^2}{l}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}\frac{r_{0s}^2}{l}\right)}\right]^{1/2}\times$$

$$\times\exp\left\{-\frac{l_{ns}^2}{2\left[\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}\frac{r_{0n}^2}{l}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}\frac{r_{0s}^2}{l}\right)\right]}\right\}\times I_0\left(\frac{l_{ns}^2}{2\left(\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}\frac{r_{0n}^2}{l}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}\frac{r_{0s}^2}{l}\right)^2\right)}\right). \qquad (23)$$

Отметим, что при одиночном прямом круглом цилиндрическом проводнике (23) превращается в классический закон Ома.

1.Харисов А.А. К вопросу распределения плотности постоянного тока в поперечном сечении прямых цилиндрических проводников // Коммунальное хозяйство городов: Науч.-техн. сб. Вып. 43. – К.: Техніка, 2002. – С.175-183.

Получено 27.08.2002

УДК 691.58.668.3

К.И.ЗУБРИЧ
Харьковская государственная академия городского хозяйства

ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРИИ СЛУЧАЙНЫХ ФУНКЦИЙ ДЛЯ ОЦЕНКИ ДИНАМИКИ ЕСТЕСТВЕННОЙ ОСВЕЩЕННОСТИ

Рассматривается вопрос рационального использования естественного освещения в системе совмещенного освещения учебных аудиторий вузов. Приведена методика обработки кривых наружной освещенности на основании теории случайных функций для определения вероятностной закономерности.

Определение параметров колебаний естественного света – его динамики имеет большое значение для разработки принципов создания автоматически управляемых систем освещения. Знание этих параметров позволяет оценить величину экономии электроэнергии и влияние динамического светового режима на работоспособность человека.

Изучение динамического режима работы системы освещения с